Devoir sur Table 6

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1*(Banque PT, Maths A, 2019)*

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A . L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Tr}(A)$ sa trace.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^\top = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute matrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. En déduire une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit r une rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'angle différent de π (modulo 2π) et soit R sa matrice dans la base canonique.
 - (a) Montrer que $R - R^{-1} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) Soit w l'unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $R - R^{-1}$ soit la matrice de l'application $u : v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique. Montrer que $w \neq 0$.
 - (c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $r(v) = v$. Montrer que $u(v) = 0$.
En déduire que l'axe de la rotation est dirigé par w .
 - (d) On suppose que l'axe de la rotation r est orienté selon w et soit $\theta \in [0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de r . On pose $e_3 = \frac{w}{\|w\|}$ et on considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) .
 - i. Écrire les matrices de r et de r^{-1} dans cette base.
 - ii. Écrire la matrice de u dans cette base.

iii. En déduire que $\sin \theta > 0$, puis que

$$\theta = \arccos \left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2} \right)$$

(e) Identifier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

(Banque PT, Maths C, 2012)

1. (a) On considère la série entière $\sum_{p>0} (-1)^p t^{2p}$; donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.
- (b) On considère la série entière $\sum_{p \geq 0} (-1)^p t^{2p+1}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_c) : y'' = 0$.
3. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_h) : (1 + t^2) y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$$

- (a) Soit f une solution de $(\mathcal{E}_h)$, définie sur $\mathbb{R}$.
 - i. Montrer que la fonction $t \rightarrow (1 + t^2) f(t)$ est une fonction affine de t (*on pensera à calculer sa dérivée seconde*).
 - ii. On note $u : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ et $v : t \mapsto \frac{t}{1 + t^2}$. Montrer que (u, v) est une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E}_h)$.
- (b) Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_h)$. On recherche les solutions de $(\mathcal{E}_h)$ développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où les $a_n, n \in \mathbb{N}$, sont des réels.

- i. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n .
 - ii. Pour tout entier naturel p , exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1 .
 - iii. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur un voisinage de 0.
4. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$(1 + t^2) y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

On cherche à résoudre $(\mathcal{E})$ en recherchant la solution sous la forme :

$$t \mapsto y(t) = \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$$

où λ et μ sont deux fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^2$ à déterminer et u et v sont les fonctions introduites à la question 3.(a)ii.

On admet qu'une telle fonction est une solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) & = 0 \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) & = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \end{cases}$$

(a) Donner les conditions vérifiées pour tout réel t par $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$.

(b) Montrer que, pour tout réel t :

$$\begin{cases} \lambda'(t) &= -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

(c) Exprimer, pour tout réel t , $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

(d) En déduire l'expression de la solution générale de $(\mathcal{E})$.

Exercice 3

(Banque PT, Maths C, 2015)

Pour tout réel $t \geq 0$ on pose :

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

1. Montrer que h est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Que vaut $h(0)$?
3. (a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a, +\infty[$.
(b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$, et en déduire que, pour tout réel positif t :

$$0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

5. Montrer que h vérifie, pour $t > 0$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$h'(t) - h(t) = -\frac{I}{\sqrt{t}}$$

6. (a) Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.
(b) Soit $t_0 > 0$. À l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en t_0 de la fonction qui, à tout réel $t > 0$, associe $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.
(c) Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $t > 0$,

$$h(t) = \left(k - I \int_{t_0}^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \right) e^t \quad (\star)$$

7. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, l'intégrale $\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ est convergente et que

$$\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx.$$

- (b) En faisant tendre t_0 vers 0 dans $(\star)$, donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que pour tout $t \geq 0$:

$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \right) e^t.$$

8. Montrer que, pour tout réel positif t :

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

9. En déduire la valeur de I .